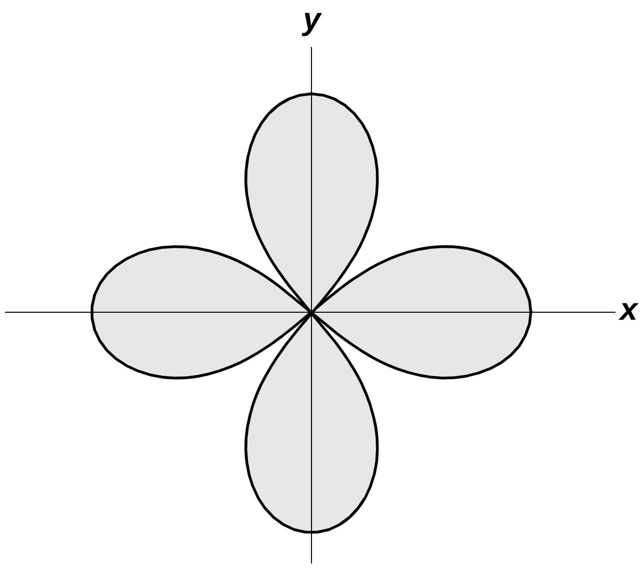
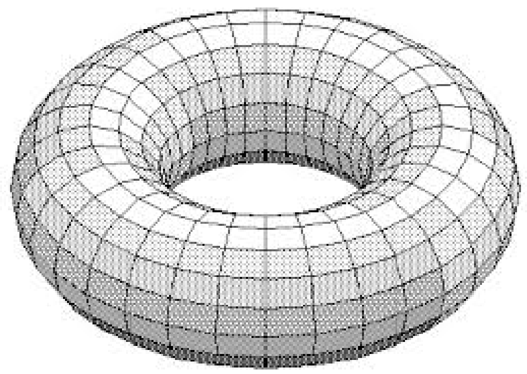


Figuren door Formules



2016 NWD 22

Freudenthal Instituut - Universiteit Utrecht

Dit pakketje - voor leerlingen van 4 vwo/havo of hoger - is ontworpen in opdracht van de NWD. Het kan worden gebruikt als voorbereiding voor het actief bezig zijn met de mooie ruimtelijke vormen die de software SURFER oplevert. Deze software is een onderdeel van project Imaginary van het Duitse onderzoekscentrum in Oberwohlfach. (Zie www.imaginarymaths.nl of imaginary.org)

Ontwerper: Martin Kindt

Universiteit Utrecht- faculteit B~etawetenschappen, Departement Wiskunde.
Freudenthal Instituut, Postbus 85170, 3508 AD Utrecht

Figuren door Formules

Voordat het wiel werd uitgevonden, konden mensen al cirkels tekenen.
In nat zand bijvoorbeeld, met een touw aan één kant vast aan een houten pin.
Archimedes zou voor hij gedood werd door een Romeinse soldaat gezegd hebben "Pas op, je staat op mijn cirkels!".
Later werd de passer uitgevonden, dat was ooit nieuwe technologie.
Met de technologie van nu kunnen cirkels op een computerscherm worden getekend, bijvoorbeeld met het programma Geogebra.
Het geheim van zo'n wiskundig tekenprogramma zit hem in de algebra.
Punten op het scherm corresponderen met coördinaten.
Lijnen, of ze nu recht zijn of krom, corresponderen met vergelijkingen, of wat algemener gezegd met *algebraïsche voorstellingen*.
Ruimtelijke figuren komen tot stand via omzettingen van ruimtecoördinaten (dat zijn rijtjes-van-3 getallen) naar schermcoördinaten (rijtjes-van-2).
Bij basisfiguren als bol, cilinder, kegel horen algebraïsche voorstellingen die geschikt zijn om door de computer te worden verwerkt.

De werkbladen in dit bundeltje - over algebraïsche voorstellingen van 2D- en 3D-figuren - dienen als aanloop naar het spelen met en het onderzoeken van ruimtelijke vormen geproduceerd door SURFER.

Voorkennis *)

- *de stelling van Pythagoras*
- *de 'merkwaardige producten'*

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

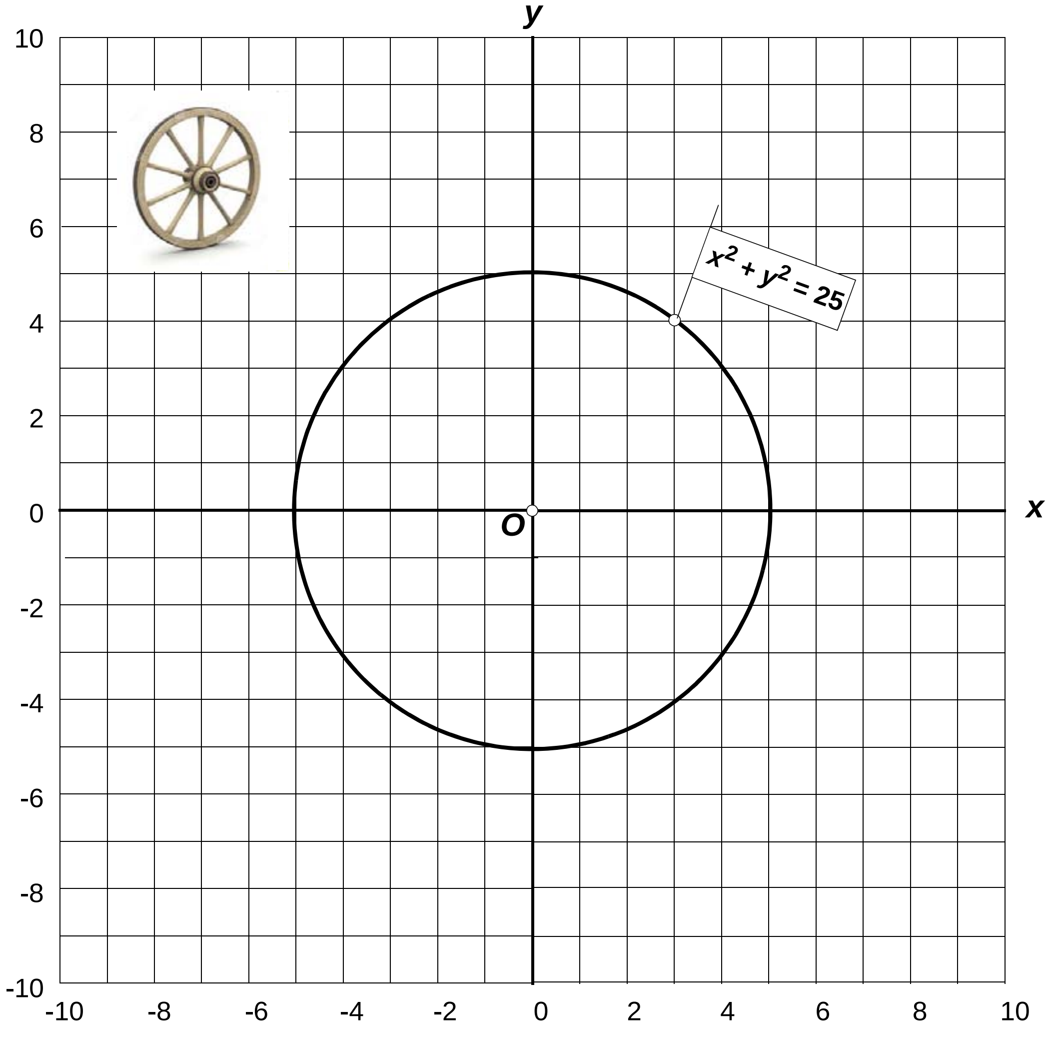
- *de stelling* $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ of $B = 0$

*) In de drie formules kunnen *A* en *B* algebraïsche expressies zijn.

Cirkelfiguren

In het assenstelsel *Oxy* is een cirkel getekend met middelpunt *O* en straal 5.
Uit de stelling van Pythagoras volgt dat het roosterpunt (3, 4) op die cirkel ligt.

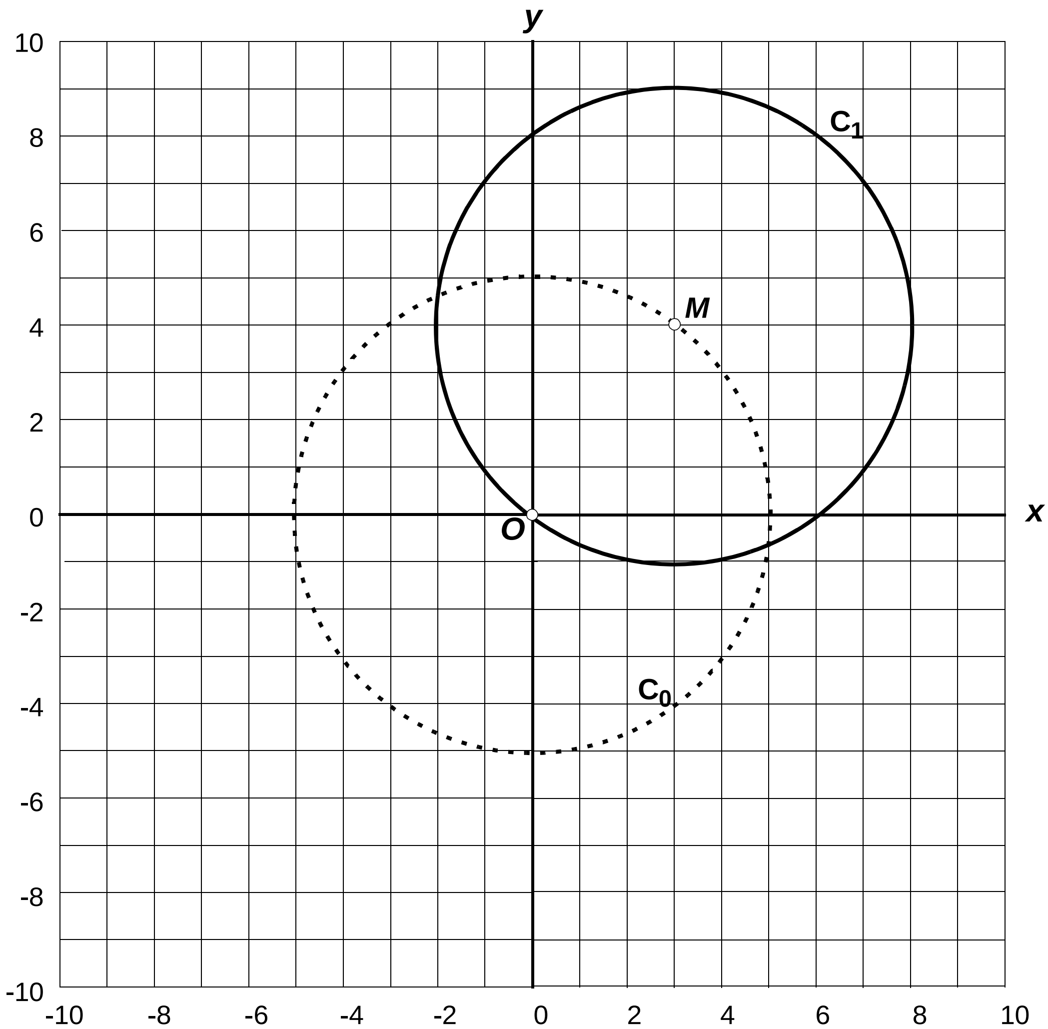
- Ga na dat er nog 11 andere roosterpunten op de cirkel liggen.



Een vergelijking die bij de cirkel past is $x^2 + y^2 = 25$ (natuurlijk: Pythagoras!).

- Teken de cirkel met middelpunt *O* en straal 3.
  Welke vergelijking (algebraïsche voorstelling) past hierbij?
- Welke figuur past bij de algebraïsche voorstelling: $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$?
- Teken de figuur die past bij: $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 4) = 0$
- Ook bij: $(x^2 + y^2)^2 - 5(x^2 + y^2) + 4 = 0$?

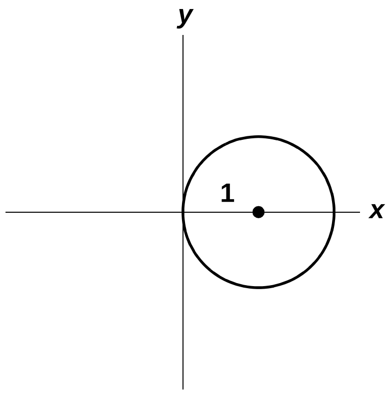
Schuiven en spiegelen



De cirkel C_0 met vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ is verschoven zo dat het middelpunt van de nieuwe cirkel de coördinaten (3, 4) heeft.

- Een vergelijking van de nieuwe cirkel C_1 is: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
  Verklaar dit.
- Een andere voorstelling van dezelfde cirkel is $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
  Verklaar dit ook.
- Als in de laatste vergelijking x en y worden verwisseld komt er
  $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. daar hoort ook een cirkel bij (C_2). Teken die.
- Teken ook het spiegelbeeld C_3 van C_1 bij spiegeling in de y-as.
  Geef een vergelijking bij C_3.

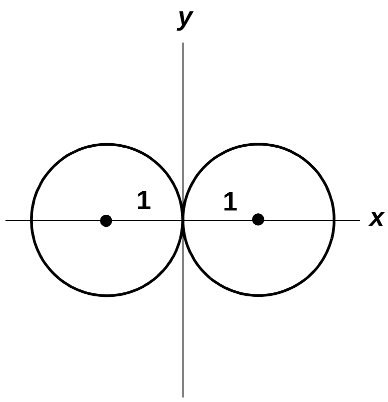
Bril en rozet



- De cirkel met straal 1 raakt aan de y-as.
  Een vergelijking bij die cirkel is:

  $$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

  Verklaar dit.



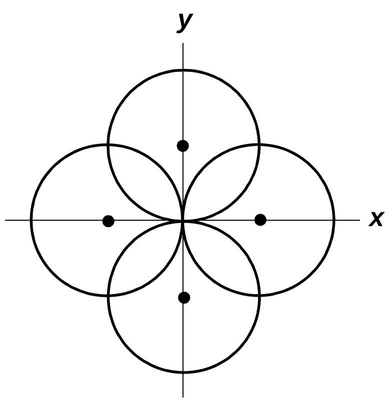
- De twee cirkels raken elkaar op de y-as
  Een vergelijking van de twee cirkels samen ('bril') is:

  $$(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 + 2x) = 0$$

  Verklaar dit.

- Een alternatieve vergelijking voor de 'bril' is: $(x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = 0$
  Ben je het daarmee eens? Waarom?

- Stel één vergelijking op voor het 'rozet' van vier cirkels .



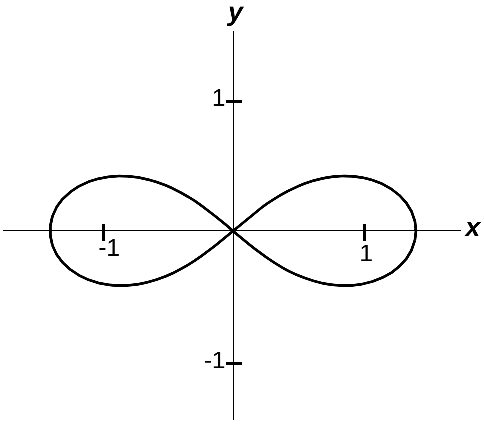
- Verklaar waarom ook deze vergelijking dit rozet voortbrengt.

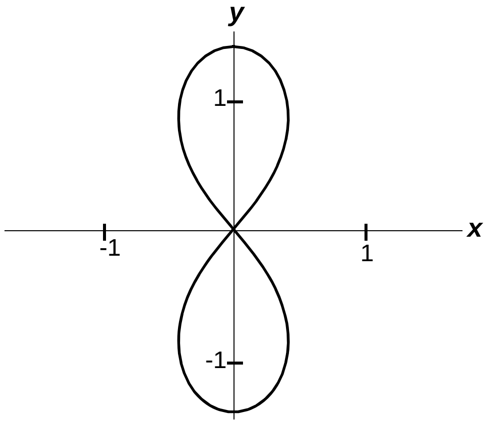
  $$(x^2 + y^2)^4 - 4(x^2 + y^2)^3 + 16x^2y^2 = 0$$

Lemniscaat en klavertje-vier

Links zie je de zogeheten *lemniscaat* met vergelijking $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$
Rechts zie je dezelfde lemniscaat, maar dan 90° gedraaid

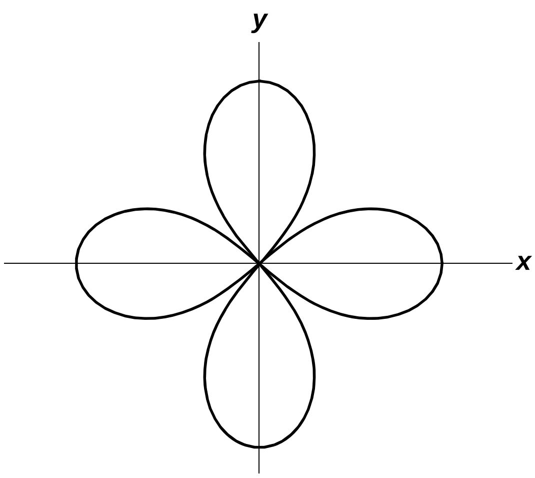
- Geef. een vergelijking die bij de rechter kromme past.





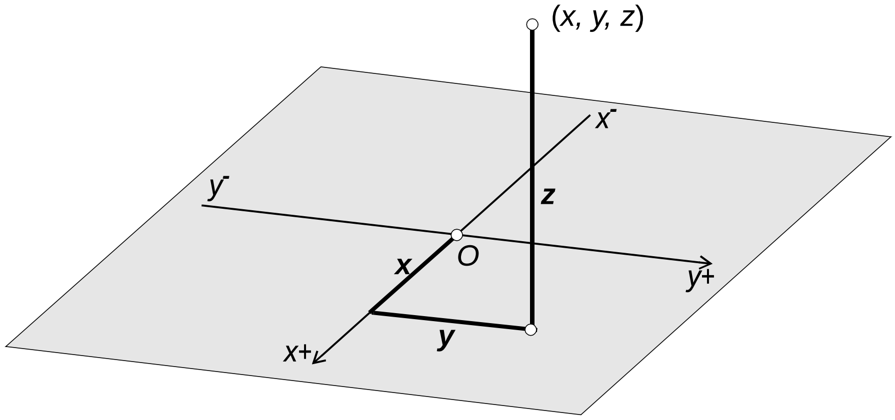
- De punten (1, 0) en (-1, 0) noem ik de basispunten van de lemniscaat links.
  Voor elk punt *P* van die lemniscaat geldt, dat het product van de kwadraten van de afstanden tot de beide basispunten gelijk is aan 1.
  Uit deze eigenschap kun je de vergelijking van de lemniscaat afleiden.
  Hint: het kwadraat van de afstand van (x, y) tot (1, 0) is gelijk aan $(x - 1)^2 + y^2$.

- Verklaar waarom
  $(x^2 + y^2)^4 - 4(x^2 - y^2)^2 = 0$
  een algebraïsche voorstelling is van dit klavertje-vier.



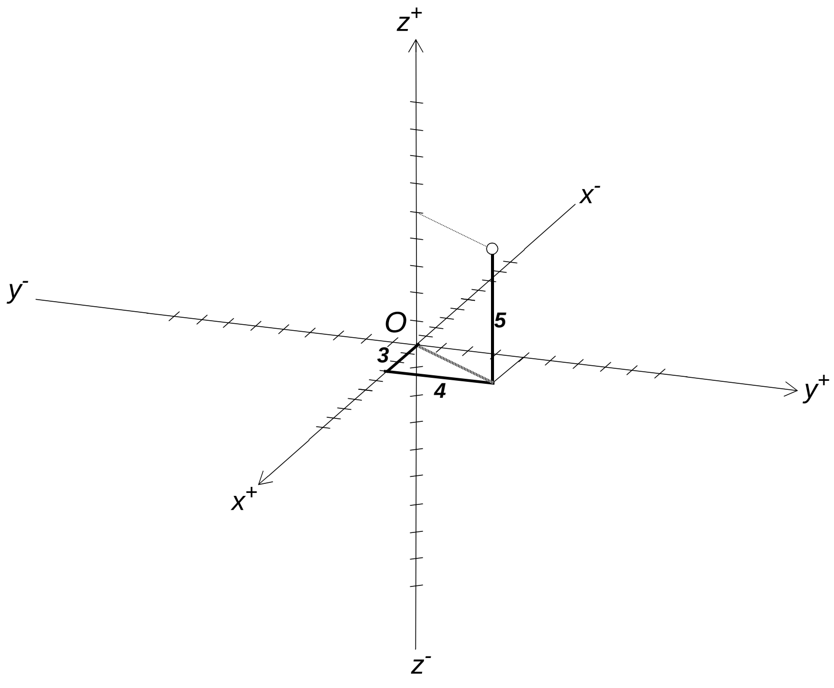
Van 2D naar 3D

De tekening stelt een vlak met een assenstelsel Oxy in de ruimte voor (let op de richting van de beide assen!) .
*De plaats van een punt in het **vlak** is bepaald door 2 coördinaten.*
*Voor de plaatsbepaling van een punt in de **ruimte** is nog een derde coördinaat nodig: de hoogte (z) boven of onder het Oxy-vlak.*



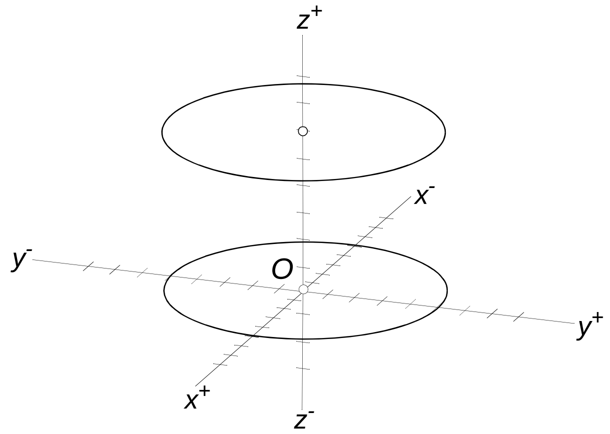
Ieder punt van de ruimte wordt nu bepaald door een uniek rijtje van 3 getallen.
Het punt O heeft de coördinaten (0, 0, 0).
Van een punt dat recht boven of onder O ligt, zijn de eerste twee coördinaten 0 *en is de derde coördinaat een positief of negatief getal.*
De lijn waarop die punten liggen noemen we voortaan de z-as.

- In het stelsel *Oxyz* hieronder is het punt (3, 4, 5) getekend.
  Geef nu ook zo nauwkeurig mogelijk de plaats aan van de punten
  (3, 4, -5), (3, -4, -5), (-9, 0, 5), (8, -4, 0), (0, 0, -5), (-8, -4, -6)



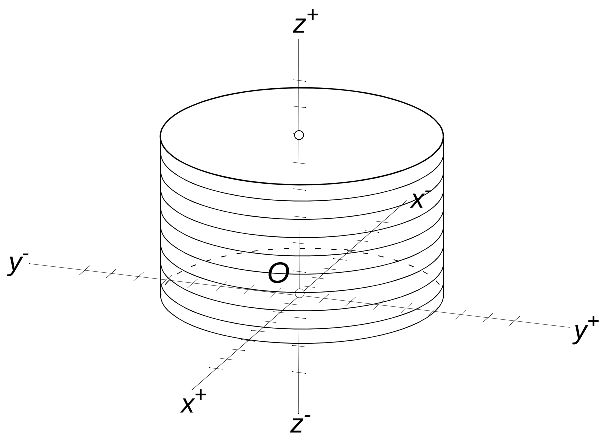
De vergelijking van een cilinder

In het *Oxy*-vlak is de cirkel met middelpunt *O* en straal 5 getekend.
Voor de punten (*x, y, z*) op die cirkel geldt $x^2 + y^2 = 25$ én $z = 0$.
Als die cirkel 6 eenheden omhoog wordt verschoven krijg je de cirkel, waarvan de punten (*x, y, z*) voldoen aan $x^2 + y^2 = 25$ én $z = 6$.



- Wat kun je zeggen van de figuur die wordt bepaald door $x^2 + y^2 = 25$ *én* $z = 3$?

- De figuur die wordt bepaald door $x^2 + y^2 = 25$ én $0 \leq z \leq 6$, is een *cilinder*. Verklaar dit.

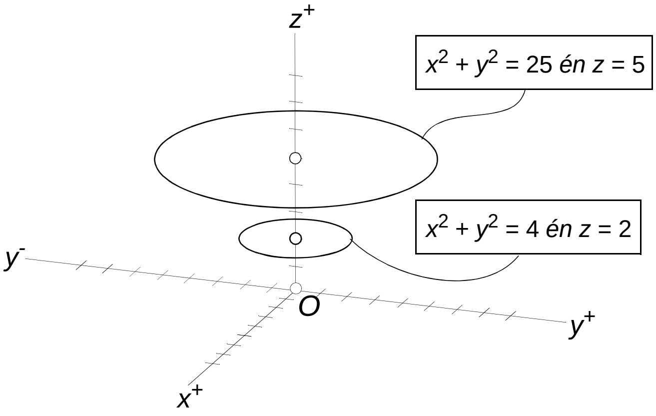


Als de beperkende voorwaarde voor *z* wordt weggelaten, dus als we alleen de vergelijking $x^2 + y^2 = 25$ bekijken, dan is de corresponderende figuur een zich naar boven en beneden oneindig ver uitstrekkende cilinder met als as de *z*-as en een straal 5. (Je zou kunnen zeggen dat de z-coördinaat **vrij** is).

- Wat is de vergelijking van een oneindige cilinder met de *y*-as als as en met straal 4? Welke coördinaat is nu vrij?

De vergelijking van een kegel

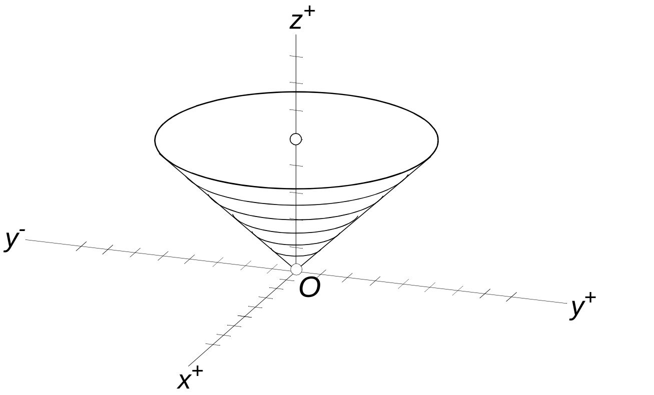
In de figuur zie je twee cirkels met middelpunt op de *z*-as en waarvan de straal gelijk is aan de hoogte boven het *Oxy*-vlak.



- Ga na dat de punten van beide cirkels voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$

- Leg uit waarom de punten (x, y, z) op de kegel in de figuur hieronder, met hoogte 5 en straal van de 'bovencirkel' gelijk aan 5, voldoen aan

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ én } 0 \le z \le 5$$

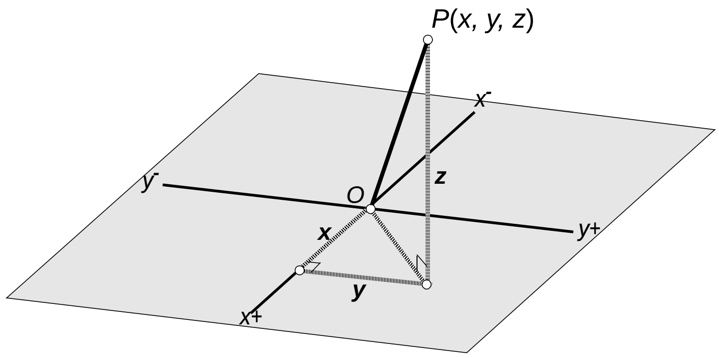


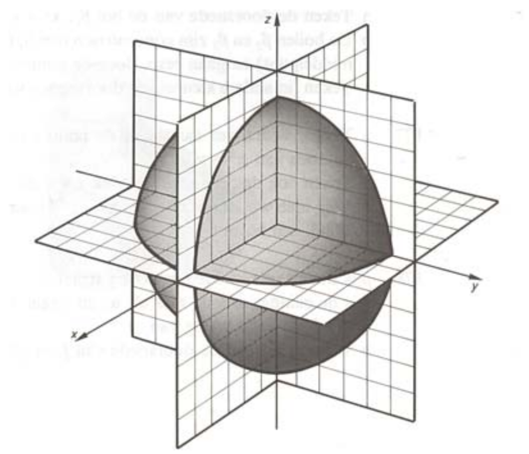
- Wat voor een figuur levert $x^2 + y^2 = z^2$ *én* $-5 \le z \le 5$ op ?

- En welke figuur krijg je als de beperkende voorwaarde voor *z* wordt weggelaten, dus wat voor een figuur past bij $x^2 + y^2 = z^2$?

Vergelijking van een bol

- De afstand van het punt $P(x, y, z)$ tot het punt O is gelijk aan $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  Leg uit waarom dit zo is.





Hiernaast zie je een plaatje van bol, samen met het *Oxy*-vlak, het O*xz*-vlak en het O*yz*-vlak.
Het middelpunt van de bol is *O* en de straal is 5.

- Uit het voorgaande volgt dat $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ een vergelijking van die bol is. Mee eens?

Alle punten met $z = 3$ liggen in een vlak V // het *Oxy*-vlak.
Dit vlak snijdt de bol volgens een cirkel.

- Schets het zichtbare deel van die cirkel in de figuur hierboven.

- Hoe groot is de straal van die cirkel en hoe kun je die cirkel algebraïsch voorstellen?

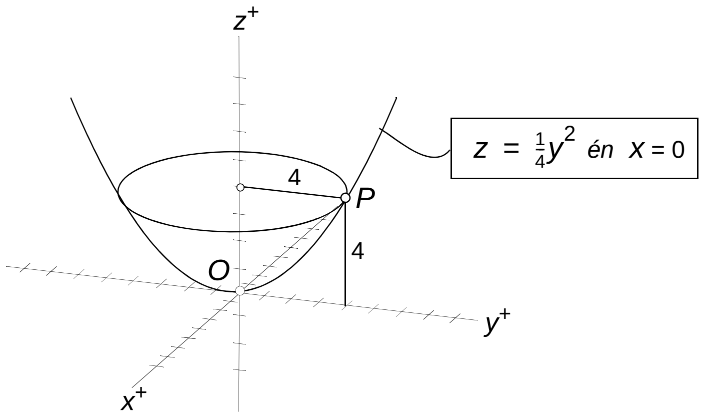
- Verklaar dat de cirkel voorgesteld door $x^2 + z^2 = 9$ *én* $y = 4$ ook op deze bol ligt.

- Geef een vergelijking van de bol met middelpunt O die door $P(2, 2, 1)$ gaat.

- Geef een vergelijking van de bol met middelpunt $P(2, 2, 1)$ die door O gaat.

Paraboloïde als omwentelingslichaam

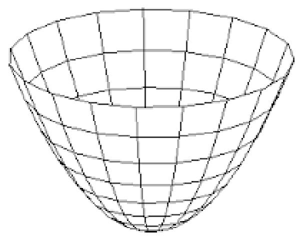
In het *Oyz*-vlak is een parabool getekend met top *O* en de *z*-as als symmetrie-as.



- In het plaatje wordt gesuggereerd dat de parabool door *P*(0, 4, 4) gaat.
  Is dat in overeenstemming met de algebraïsche voorstelling?

- Stel dat de parabool 90° om de *z*-as wordt gedraaid.
  Welke algebraïsche voorstelling past bij de nieuwe parabool?

Nu draaien we de parabool continu om de *z*-as. Er ontstaat dan een zogenaamd *omwentelingslichaam*.



Deze vorm wordt *paraboloïde* genoemd. Schotelantennes en radiotelescopen hebben deze vorm.
De *z*-coördinaat van een willekeurig punt *P* op de paraboloïde is $\frac{1}{4}$ *maal het kwadraat van de afstand van P tot de z-as*.

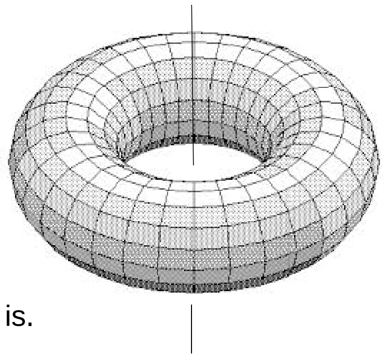
- Verklaar dit.

Hieruit volgt dat je een vergelijking van de paraboloïde krijgt door in $z = \frac{1}{4}y^2$ de *y* te vervangen door $\sqrt{x^2+y^2}$

Er komt dan als vergelijking: $\boxed{z = \frac{1}{4}(x^2+y^2)}$

- Zonder beperkende voorwaarde is de paraboloïde een oneindige figuur.
  Beperking tot bijvoorbeeld $0 \le z \le 9$ geeft een ’schotelantenne’.
  Wat is in dit geval de straal van de grootste cirkel?

Torus



Een mooi voorbeeld van een omwentelingslichaam is de *torus* ('zwemband') die je krijgt door een cirkel - zeg in het *Oxz*-vlak - te wentelen om de *z*-as.
Neem de cirkel met middelpunt (4, 0, 0) en straal 2.

- Laat zien dat

  $x^2 + z^2 - 8x + 12 = 0$ *én* $y = 0$

  een algebraïsche voorstelling van deze cirkel is.

- Welke algebraïsche voorstelling heeft de cirkel die je krijgt na een draaiing van deze cirkel om de z-as over 180°?

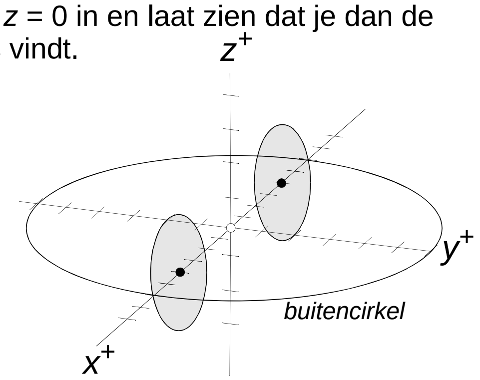
- De vergelijking van de twee cirkels samen is: $(x^2 + z^2 + 12)^2 - 64x^2 = 0$ (*).
  Ga dit na.

- Een vergelijking van het omwentelingslichaam, beschreven door dit paar cirkels, krijg je door in (*) x^2 te vervangen door $x^2 + y^2$ en er komt dan:

  $$(x^2 + y^2 + z^2 + 12)^2 - 64(x^2 + y^2) = 0.$$

  Dit is de vergelijking van een torus!

- Deze torus snijdt het *Oxy*-vlak volgens twee cirkels (één buiten- en één binnencirkel). Die cirkels hebben respectievelijk de stralen 6 en 2.
  Vul in de vergelijking van de torus $z = 0$ in en laat zien dat je dan de vergelijkingen van die twee cirkels vindt.



- **Toegift.**
  Snijden van de torus met het vlak $y = -2$ levert op; .

  $$(x^2 + z^2 + 16)^2 - 64(x^2 + 4) = 0 \text{ én } y = -2$$

  De eerste vergelijking laat zich omwerken tot: $(x^2 + z^2)^2 = 32(x^2 - z^2)$.
  Controleer dit en vergelijk dit met de vergelijking van de lemniscaat (blz 5).
  Conclusie?